第 21 講　ベクトル(3)

1　平面上に互いに異なる３点 O，A，B があり，それらは同一直線上にはないものとする．OA＝2，OB＝3 とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，その内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}=t$ とおく．∠AOB の二等分線と線分 AB との交点を C とし，直線 OA に関して点 B と対称な点を D とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となるとき，∠AOB と線分 OC の長さを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　△ABCにおいて，AB＝3，AC＝5，BC＝$2\sqrt{6}$とする．△ABCの外心をOとし，Oから辺ABに下ろした垂線とABの交点をM，Oから辺ACに下ろした垂線とACの交点をN，直線AOと辺BCの交点をDとする．

(1)　$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$の内積を求めよ．

(2)　$|\overrightarrow{AO}|$の値を求めよ．

(3)　BD：DC＝s：$(1-s)$　$(0<s<1)$，$\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{AD}$　(kは実数)とするとき，$\overrightarrow{MO}$と$\overrightarrow{NO}$をそれぞれk，s，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$を用いて表せ．

(4)　$\overrightarrow{AO}$を$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　△OAB に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$　とする．また，△OAB の面積を S とする．

(1)　$1 \leqq s+t \leqq 3$ のとき，点 P の存在し得る領域の面積を S を用いて表せ.

(2)　$1 \leqq s+2t \leqq 3$ のとき，点 P の存在し得る領域の面積を S を用いて表せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　ベクトル(3)

三角形OABについて，$OA=\sqrt{2}$，$OB=\sqrt{3}$，$AB=2$とする．点Oから辺ABに垂線を下ろしたときの交点をL，辺OBに関してLと対称な点をPとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とおく．

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$である．また，$\overrightarrow{OL}=\dfrac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\left(\boxed{\text{エ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{オ}}\,\vec{b}\right)$である．

(2)　$\overrightarrow{OP}=-\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}\vec{b}$である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

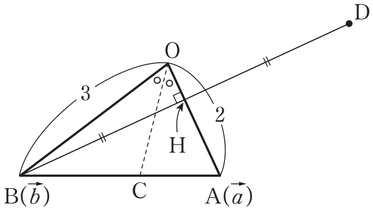
第21講　ベクトル(3)

1　平面上に互いに異なる3点O，A，Bがあり，それらは同一直線上にはないものとする．OA＝2，OB＝3とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とし，その内積を$\vec{a}\cdot\vec{b}=t$とおく．∠AOBの二等分線と線分ABとの交点をCとし，直線OAに関して点Bと対称な点をDとする．

(1)　$\overrightarrow{OC}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{OD}$をt，$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(3)　$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OD}$となるとき，∠AOBと線分OCの長さを求めよ．



(1)　角の二等分線の性質より　AC：BC＝OA：OB＝2：3

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}}$

(2)　線分BDの中点をHとすると，実数kを用いて

$\overrightarrow{OH}=k\vec{a}$　とおける．

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BH}$より　　$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB})=0$

$\vec{a}\cdot(k\vec{a}-\vec{b})=0$　　$k|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　　$k=\dfrac{t}{4}$

よって　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{t}{4}\vec{a}$

したがって　$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{BH}=2\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{\dfrac{t}{2}\vec{a}-\vec{b}}$

(3)　$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{10}(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(t\vec{a}-2\vec{b})=0$

$3t|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+2t\vec{a}\cdot\vec{b}-4|\vec{b}|^2=0$

$12t-6t+2t^2-36=0$　　$t^2+3t-18=0$　　$t=3，-6$

$t=3$のとき　$\cos\angle AOB=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{2\times3}=\dfrac{1}{2}$　　$\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$

このとき　$|\overrightarrow{OC}|^2=\dfrac{1}{5^2}(9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)=\dfrac{36\cdot3}{5^2}$　　$|\overrightarrow{OC}|=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$

$t=-6$のとき　$\cos\angle AOB=-1$　　$\angle AOB=\pi$

よって3点O，A，Bが同一直線上となり不適．

以上より　$\boldsymbol{\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}}$，$\boldsymbol{OC=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

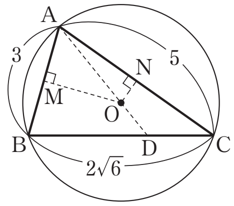
2　△ABCにおいて，AB＝3，AC＝5，BC＝$2\sqrt{6}$とする．△ABCの外心をOとし，Oから辺ABに下ろした垂線とABの交点をM，Oから辺ACに下ろした垂線とACの交点をN，直線AOと辺BCの交点をDとする．

(1)　$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$の内積を求めよ．

(2)　$|\overrightarrow{AO}|$の値を求めよ．

(3)　BD：DC＝s：$(1-s)$　$(0<s<1)$，$\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{AD}$（$k$は実数）とするとき，$\overrightarrow{MO}$と$\overrightarrow{NO}$をそれぞれ$k$，$s$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$を用いて表せ．

(4)　$\overrightarrow{AO}$を$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$を用いて表せ．



(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=3\times5\times\dfrac{9+25-24}{2\times3\times5}=\mathbf{5}$

(2)　$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって　正弦定理より　$2\mathrm{OA}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

ゆえに　$|\overrightarrow{AO}|=\mathrm{OA}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

(3)　BD：DC＝s：$(1-s)$，$\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{AD}$より

$$\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=k\{(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}\}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$=\boldsymbol{\left(k-ks-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}+ks\overrightarrow{AC}}$$

$$\overrightarrow{NO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AN}=k\{(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}\}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{(k-ks)\overrightarrow{AB}+\left(ks-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}}$$

(4)　$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{MO}$より　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MO}=\left(k-ks-\dfrac{1}{2}\right)|\overrightarrow{AB}|^2+ks\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

よって　$18k-8ks-9=0$　……①

$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{NO}$　より　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{NO}=(k-ks)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left(ks-\dfrac{1}{2}\right)|\overrightarrow{AC}|^2=0$

よって　$2k+8ks-5=0$　……②

①，②より　$k=\dfrac{7}{10}$，$s=\dfrac{9}{14}$

したがって　$\overrightarrow{AO}=\dfrac{7}{10}\left\{\left(1-\dfrac{9}{14}\right)\overrightarrow{AB}+\dfrac{9}{14}\overrightarrow{AC}\right\}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{9}{20}\overrightarrow{AC}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$\triangle$OAB に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$　とする．また，$\triangle$OAB の面積を S とする．

(1)　$1\leqq s+t\leqq 3$ のとき，点 P の存在し得る領域の面積を S を用いて表せ．

(2)　$1\leqq s+2t\leqq 3$ のとき，点 P の存在し得る領域の面積を S を用いて表せ．

(1)　$s+t=k$ とおくと　$1\leqq k\leqq 3$

また　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(s+t)\left(\dfrac{s}{s+t}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{t}{s+t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

$\dfrac{s}{s+t}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{t}{s+t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　$(1\leqq k\leqq 3)$

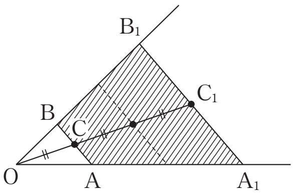
よって　$\overrightarrow{\mathrm{OC_1}}=3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　となる点 $\mathrm{C_1}$ をとると，

点 P は線分 $\mathrm{CC_1}$ 上を動く．

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　となる点 $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{B_1}$

をとると，点 P は台形 $\mathrm{AA_1B_1B}$ の内部および周を動く．

ゆえに，求める面積は　$(3^2-1^2)S=\boldsymbol{8S}$



(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2t\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

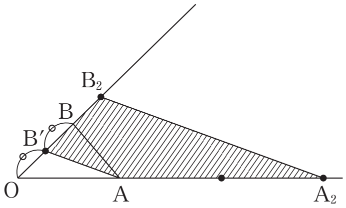
$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2t\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$

よって　$2t=T$　とおくと

$1\leqq s+T\leqq 3$，$s\geqq 0$，$T\geqq 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+T\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$

したがって(1)より求める面積は

$8\times\triangle\mathrm{OAB'}=8\times\dfrac{1}{2}S=\boldsymbol{4S}$



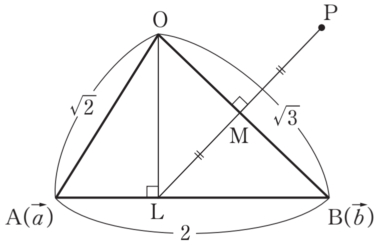
ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　ベクトル(3)

三角形OABについて，OA＝$\sqrt{2}$，OB＝$\sqrt{3}$，AB＝2とする．点Oから辺ABに垂線を下ろしたときの交点をL，辺OBに関してLと対称な点をPとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とおく．

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．また，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\left(\boxed{\text{エ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{オ}}\,\vec{b}\right)$ である．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}\vec{b}$ である．



(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{2+3-4}{2}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

Lは辺AB上の点より　$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{OL}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$$(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}-(1-t)|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\frac{1}{2}(1-t)-2(1-t)+3t-\frac{1}{2}t=0 \qquad t=\frac{3}{8}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{5}{8}\vec{a}+\dfrac{3}{8}\vec{b}=\mathbf{\dfrac{1}{8}(5\vec{a}+3\vec{b})}$

(2)　点LからOBに垂線を下ろしたときの交点をMとすると，実数kを用いて$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=k\vec{b}$とおける．

$\overrightarrow{\mathrm{LM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{LM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(k\vec{b}-\frac{5}{8}\vec{a}-\frac{3}{8}\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0$$

$$k|\vec{b}|^2-\frac{5}{8}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{3}{8}|\vec{b}|^2=0 \qquad 3k-\frac{5}{16}-\frac{9}{8}=0 \qquad k=\frac{23}{48}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{23}{48}\vec{b}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}+2\overrightarrow{\mathrm{LM}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}+2(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}})=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}$

$$=2\cdot\frac{23}{48}\vec{b}-\left(\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}\right)=-\mathbf{\frac{5}{8}}\vec{a}+\mathbf{\frac{7}{12}}\vec{b}$$

【別解】　$\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{8}(5\vec{a}+3\vec{b})\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{8}(5\vec{a}\cdot\vec{b}+3|\vec{b}|^2)=\dfrac{1}{8}\left(5\times\dfrac{1}{2}+3\times3\right)=\dfrac{23}{16}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\vec{b}=|\overrightarrow{\mathrm{OL}}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{BOL}=|\vec{b}||\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\sqrt{3}\,|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|$

よって　$\sqrt{3}\,|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\dfrac{23}{16}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\dfrac{23}{16\sqrt{3}}=\dfrac{23}{48}\sqrt{3}=\dfrac{23}{48}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{23}{48}\vec{b}$　　(以下略)

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。